

**ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩАЯ
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН
В ПЛОСКОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ,
ЗАПОЛНЕННОМ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ¹**

Аннотация.

Актуальность и цели. Целью работы является исследование задачи распространения электромагнитных ТЕ-волн в плоском нелинейном неоднородном диэлектрическом волноводе.

Материалы и методы. Применены общие методы теории краевых задач, метод полуобращения (сведение дифференциального уравнения к интегральному с использованием функции Грина), принцип сжимающих отображений, метод малого параметра.

Результаты. Получено дисперсионное уравнение. Доказано существование собственных значений – корней дисперсионного уравнения (постоянных распространения) и указаны области их локализации. Представлены численные результаты (графики дисперсионных кривых и собственных функций исследуемой задачи).

Выводы. Полученные результаты могут быть использованы при изучении задачи распространения связанных поляризованных волн.

Ключевые слова: неоднородный нелинейный плоский волновод, задача на собственные значения, функция Грина, постоянная распространения, дисперсионное уравнение.

Е. А. Marennikova

**EIGENVALUE PROBLEM THAT DESCRIBES
ELECTROMAGNETIC TE-WAVE PROPAGATION
IN A PLANE DIELECTRIC WAVEGUIDE
WITH NONLINEAR INHOMOGENEOUS MEDIA**

Abstract.

Background. The aim of this work is to study the problem of electromagnetic TE- waves propagation in a plane nonlinear inhomogeneous dielectric waveguide.

Materials and methods. The author used general methods of the theory of boundary value problems, the semi-conversion method (reduction of the differential equation to the integral equation using the Green's function), the contracting mapping method.

Results. The researcher has obtained a dispersion equation and proved existence of dispersion equation's roots (propagation constants). The regions of localization of the propagation constants have been found. Numerical results (graphics of dispersion curves and eigenfunctions of the problem) have been presented.

Conclusions. The obtained results can be used in the study of the problem of coupled electromagnetic waves propagation.

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 2.1102.2014К) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-00206).

Key words: inhomogeneous nonlinear plane waveguide, eigenvalue problem, Green's function, propagation constant, dispersion equation.

Введение

Задачи распространения поверхностных электромагнитных волн в нелинейных средах активно исследуются в течение последних десятилетий. При этом рассматриваются задачи с разными геометриями, типами нелинейностей, типами электромагнитных волн (ТЕ- и ТМ-волны) и т.д.

Задачи распространения плоских монохроматических поляризованных волн в слоистых средах (см., например, [1, 2]) представляют собой задачи сопряжения на собственные значения. Такие задачи сводятся к отысканию значений спектрального параметра, при которых волна может распространяться.

Распространение поверхностных ТЕ-волн в нелинейных средах изучается в [1–7]; ТМ-волн в [1, 2, 4, 8–10]. В упомянутых работах представлены различные методы как аналитические, так и численные, позволяющие исследовать указанные задачи электродинамики. К методам изучения задач распространения электромагнитных волн в нелинейных средах можно отнести, например, метод интегральных дисперсионных уравнений [2, 5–9] и метод задачи Коши [3, 10]. Метод задачи Коши является эффективным численным методом, который позволяет проводить расчеты для весьма широкого класса нелинейностей.

1. Электродинамическая постановка задачи

Изучим задачу о распространении монохроматической ТЕ-поляризованной электромагнитной волны вдоль поверхности плоского диэлектрического волновода

$$\Sigma = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, -\infty < y, z < +\infty\},$$

расположенного между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости $\epsilon_0\epsilon_1 \geq \epsilon_0$ и $\epsilon_0\epsilon_3 \geq \epsilon_0$ соответственно (ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума). Без потери общности можно считать, что $\epsilon_1 \geq \epsilon_3 > 0$. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Монохроматическая ТЕ-поляризованная волна имеет вид

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(0, E_y, 0)^T, \quad \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t}(H_x, 0, H_z)^T, \quad (1)$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ – комплексные амплитуды, а компоненты определяются следующим образом:

$$E_y \equiv E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x \equiv H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z \equiv H_z(x)e^{i\gamma z}, \quad (2)$$

где γ – неизвестный действительный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

Волновод заполнен неоднородной средой, диэлектрическая проницаемость ϵ которой выражается формулой $\epsilon \equiv \epsilon_0(\epsilon_2(x) + \alpha|\mathbf{E}|^2)$, где

$\epsilon_2(x) \in C[0, h]$, α – вещественная положительная постоянная (коэффициент нелинейности).

Комплексные амплитуды (1) удовлетворяют системе уравнений Максвелла в гармоническом режиме

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (3)$$

условию непрерывности касательных компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально убывает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$, $x > h$.

Требуется определить вещественные положительные значения спектрального параметра γ , для которых существуют нетривиальные вектор-функции $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ с компонентами вида (2), удовлетворяющие уравнениям (3) и указанным выше условиям.

2. Нелинейная задача типа Штурма – Лиувилля

Сформулированная в предыдущем пункте проблема о распространении волн сводится к задаче типа Штурма – Лиувилля для уравнения

$$u''(x) = -(\epsilon_2(x) - \gamma^2 + \alpha u^2(x))u(x), \quad x \in [0, h], \quad (4)$$

с краевыми условиями третьего рода

$$k_1 u(0) - u'(0) = 0, \quad k_3 u(h) + u'(h) = 0, \quad (5)$$

где $k_1 = \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_1}$, $k_3 = \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_3}$, $\epsilon_2 \in C[0, h]$, $\alpha > 0$ – постоянный множитель,

$$u \in C^1[0, h] \cap C^2(0, h), \quad (6)$$

величина $u(0) \neq 0$ считается фиксированной (без потери общности $u(0) > 0$).

Определение. Число $\gamma = \hat{\gamma}$ такое, что для фиксированного значения $u(0) > 0$ существует не равная тождественно нулю функция $u \equiv u(x; \hat{\gamma})$, которая удовлетворяет задаче (4)–(6), будем называть собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн, а соответствующую ему функцию $u(x; \hat{\gamma})$ – собственной функцией.

Задача P_α : исследовать разрешимость задачи (4)–(6).

Кроме того, будем рассматривать и **задачу P_0** , которая соответствует задаче (4)–(6) при $\alpha = 0$.

Замечание 1. Собственное значение γ зависит от значения собственной функции на одной из границ волновода, в рассматриваемом случае от $u(0)$. Это является важным отличием рассматриваемой задачи от классической задачи Штурма – Лиувилля.

Покажем, что исходная задача о распространении волн сводится к задаче P_α . Действительно, подставляя компоненты (2) в систему (3), получим уравнение

$$E_y'' + (k_0^2 \epsilon - \gamma^2) E_y = 0,$$

где $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, а $H_x = -\frac{\gamma}{\omega \mu_0} E_y$, $H_z = -\frac{i}{\omega \mu_0} E'_y$. Выполним нормировку этого уравнения в соответствии с формулами $\tilde{x} = k_0 x$, $\frac{d}{dx} = k_0 \frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k_0}$, обозначив $u(\tilde{x}) := E_y(\tilde{x})$ и опуская значок тильды, получаем [2]:

$$u''(x) = (\gamma^2 - \epsilon)u(x), \quad (7)$$

где ϵ определяется в зависимости от области (см. предыдущий пункт).

В полупространствах $x < 0$ и $x > h$ имеем $\epsilon = \epsilon_1$ и $\epsilon = \epsilon_3$ соответственно, тогда, принимая во внимание условие затухания поля на бесконечности, получаем решение уравнения (7) в форме

$$u(x) = \begin{cases} Ae^{k_1^2 x}, & x < 0 \\ Be^{-k_3^2 (x-h)}, & x > h. \end{cases} \quad (8)$$

Из формул (8) легко видеть, что для γ справедливо неравенство $\gamma^2 > \max\{\epsilon_1, \epsilon_3\}$. Постоянная A в (8) определяется начальным условием: $u(0) = A$. Для определения постоянной B используются условия непрерывности касательных компонент электромагнитного поля, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$[u]|_{x=0} = [u]|_{x=h} = [u']|_{x=0} = [u']|_{x=h} = 0, \quad (9)$$

где $[f]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Принимая во внимание решения системы (8) и используя условия (9), получаем условия (5). Очевидно, что внутри слоя Σ уравнение (7) принимает вид (4).

3. Нелинейное интегральное уравнение

Для изучения задачи P_α используем метод полуобращения (с помощью функции Грина) линейной части дифференциального оператора в уравнении (4).

Обозначим $\lambda := \gamma^2$. Рассмотрим линейное уравнение

$$\mathbf{L}u = 0, \quad (10)$$

где $\mathbf{L}$ действует из $C^2[0, h]$ в $C[0, h]$ по формуле $u \rightarrow u'' + (\epsilon_2(x) - \lambda)u$; тогда уравнение (4) принимает вид

$$\mathbf{L}u = -\alpha u^3.$$

В дальнейшем нам понадобится функция Грина следующей краевой задачи [11]:

$$\mathbf{L}G(x, s) = -\delta(x - s) \quad (11)$$

с условиями $\partial_x G(x, s)|_{x=0} = 0$, $\partial_x G(x, s)|_{x=h} = 0$. В силу классических результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений такая функция Грина существует.

Для дальнейших рассмотрений удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} G(0, 0) &:= \lim_{s \rightarrow 0} G(0, s), \quad G(h, 0) := \lim_{s \rightarrow 0} G(h, s), \\ G(0, h) &:= \lim_{s \rightarrow h} G(0, s), \quad G(h, h) := \lim_{s \rightarrow h} G(h, s). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя вторую формулу Грина и (11), получаем

$$\int_0^h (GLu - uLG) dx = u'(h)G(h, s) - u'(0)G(0, s). \quad (13)$$

Теперь, используя условия (5), преобразуем (13):

$$\int_0^h (GLu - uLG) dx = -k_3 u(h)G(h, s) - k_1 u(0)G(0, s). \quad (14)$$

Имея в виду, что $Lu = -\alpha u^3$ (см. (4) и (10)), и используя (11) и (14), получаем соотношение

$$u(s) = \alpha \int_0^h G(x, s) u^3(x) dx - k_3 u(h)G(h, s) - k_1 u(0)G(0, s). \quad (15)$$

Используя (15), получаем

$$u(h) = \alpha \int_0^h G(x, h) u^3(x) dx - k_3 u(h)G(h, h) - k_1 u(0)G(0, h), \quad (16)$$

откуда находим

$$u(h) = -\frac{k_1 u(0)G(0, h)}{1 + k_3 G(h, h)} + \alpha \int_0^h \frac{G(x, h)}{1 + k_3 G(h, h)} u^3(x) dx.$$

Подставляя полученное значение $u(h)$ в уравнение (15), получаем интегральное представление решения $u(s)$ уравнения (4) в операторной форме

$$u(s) = \alpha F(u) + f(s), \quad (17)$$

где оператор F действует из $C[0, h]$ в $C[0, h]$, а его действие определено формулой

$$u \rightarrow \int_0^h \left[G(x, s) - k_3 \frac{G(h, s)G(x, h)}{1 + k_3 G(h, h)} \right] u^3(x) dx,$$

а

$$f(s) := k_1 \frac{k_3[G(h,s)G(0,h) - G(h,h)G(0,s)] - G(0,s)}{1 + k_3G(h,h)} u(0).$$

Поскольку функция Грина (11) зависит от параметра λ , то и представление (17) также зависит от этого параметра. Обозначим Λ_* – объединение множества собственных значений задачи (11) и множества тех точек λ , в которых выражение $1 + k_3G(h,h;\lambda)$ обращается в нуль. Представление (17) корректно определено для всех значений параметра $\lambda \notin \Lambda_*$. В дальнейшем всегда считаем, что $\lambda \notin \Lambda_*$.

Если $u(0) = A > 0$ известно и u удовлетворяет условиям (6), то формула (17) при $x \in [0, h]$ представляет собой нелинейное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (4)–(6).

Подставляя $s = 0$ в (15), получаем дисперсионное уравнение в форме

$$Ag(\lambda) = \alpha\Phi(\lambda), \quad (18)$$

где

$$g(\lambda) = 1 + k_1G(0,0) + k_3G(h,h) - k_1k_3[G(h,0)G(0,h) - G(h,h)G(0,0)], \quad (19)$$

$$\Phi(\lambda) = \int_0^h [(1 + k_3G(h,h))G(x,0) - k_3G(h,0)G(x,h)] u^3(x) dx. \quad (20)$$

4. Исследование нелинейного интегрального уравнения

Пусть Λ есть некоторый отрезок вещественной числовой оси. Из предыдущего ясно, что ядро, обозначим его $G_* \equiv G_*(x,s;\lambda)$, оператора $\mathbf{F}$ в уравнении (17) является непрерывной при $(x,s,\lambda) \in [0,h] \times [0,h] \times (\Lambda \setminus \Lambda_*)$ функцией.

Как известно [12], линейный интегральный оператор

$$\mathbf{G}_* u = \int_0^h G_*(x,s) u(x) dx,$$

действующий из $C[0,h]$ в $C[0,h]$, является непрерывным и ограниченным в $C[0,h]$. Так как нелинейный оператор $\mathbf{B}: u \rightarrow u^3$ ограничен и непрерывен в пространстве $C[0,h]$, то нелинейный оператор $\mathbf{F} (= \mathbf{G}_* \cdot \mathbf{B})$ является вполне непрерывным на каждом ограниченном в $C[0,h]$ множестве.

В последующих рассуждениях понадобится вспомогательное кубическое уравнение

$$\alpha \|\mathbf{G}_*\| r^3 + \|f\| = r, \quad (21)$$

где норма оператора $\|\mathbf{G}_*\| (> 0)$ определяется формулой

$$\|G_*\| = \max_{s \in [0, h]} \int_0^h |G_*(x, s)| dx, \text{ а } \|f\| = \max_{s \in [0, h]} |f(s)|.$$

Как известно [12], если

$$0 \leq \|f\| < \frac{2}{3\sqrt{3\alpha\|G_*\|}}, \quad (22)$$

то уравнение (21) имеет два неотрицательных корня r^* , r_* таких, что

$$0 \leq r_* < \frac{1}{\sqrt{3\alpha\|G_*\|}} < r^* \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\|G_*\|}};$$

при этом если $\|f\| = 0$, то $r_* = 0$, $r^* = \frac{1}{\sqrt{\alpha\|G_*\|}}$; если $\|f\| = \frac{2}{3\sqrt{3\alpha\|G_*\|}}$, то

$$r_* = r^* = \frac{1}{\sqrt{3\alpha\|G_*\|}}.$$

Простым следствием указанного результата является следующее утверждение.

Утверждение 1. Если выполняется условие (22), то уравнение (17) имеет по крайней мере одно решение u , причем $\|u\| \leq r^*$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (17). Правая часть W этого уравнения определяет вполне непрерывный в пространстве $C[0, h]$ оператор. Легко видеть, что указанный оператор переводит шар $S^* = \{u \in C[0, h] : \|u\| \leq r^*\}$ в себя. Действительно, пусть $u \in S^*$, тогда, используя формулы (17), (21), (22), получим оценку

$$\|W(u)\| \leq \alpha\|G_*\| \cdot \|u^3\| + \|f\| \leq \alpha\|G_*\|(r^*)^3 + \|f\| = r^*. \quad (23)$$

Полученная оценка и означает, что $WS^* \subset S^*$.

Кроме того, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\alpha < \alpha_0^2$, где $\alpha_0 = \frac{2}{3\|f\|\sqrt{3\|G_*\|}}$, то уравнение (17)

имеет единственное решение $u \in C[0, h]$ и верна оценка $\|u\| \leq r_*$.

Доказательство. Пусть $u \in S_* = \{u \in C[0, h] : \|u\| \leq r_*\}$, тогда верна оценка

$$\|W(u)\| \leq \alpha\|G_*\| \cdot \|u^3\| + \|f\| \leq \alpha\|G_*\|r_*^3 + \|f\| = r_*, \quad (24)$$

где W есть правая часть уравнения (17).

Если $u_1, u_2 \in S_*$, то, используя принцип сжимающих отображений, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}(u_1) - \mathbf{W}(u_2)\| &= \alpha \|\mathbf{F}(u_1) - \mathbf{F}(u_2)\| = \\ &= \alpha \left\| \int_0^h G_*(x, s)(u_1^3(x) - u_2^3(x)) dx \right\| \leq 3\alpha \|\mathbf{G}_*\| r_*^2 \|u_1 - u_2\|. \end{aligned} \quad (25)$$

Так как $\alpha < \alpha_0^2$, то $f(s)$ удовлетворяет условию (22), следовательно, выполняется условие $r_* < \frac{1}{\sqrt{3\alpha \|\mathbf{G}_*\|}}$. Учитывая принцип сжимающих отображений, получаем, что $3\alpha \|\mathbf{G}_*\| r_*^2 < 1$, следовательно $\mathbf{W}$ отображает шар S_* в себя и является сжимающим оператором в S_* , и, значит, уравнение (17) имеет единственное решение в S_* .

Теорема 2. Пусть для уравнения (17) выполняется условие (22) и пусть также $G_*(x, s; \lambda) \in C([0, h] \times [0, h] \times \Lambda_0)$, где Λ_0 – некоторый отрезок вещественной числовой оси. Тогда существует и единственно решение $u(x; \lambda) \in C([0, h] \times \Lambda_0)$ уравнения (17).

Доказательство. При выполнении условия (22) теорема 1 гарантирует существование единственного решения $u \equiv u(s; \lambda)$ уравнения (17). Докажем непрерывную зависимость этого решения от параметра λ .

Ясно, что $r_* \equiv r_*(\lambda)$ непрерывно зависит от $\lambda \in \Lambda_0$ (как корень алгебраического уравнения, коэффициенты которого непрерывно зависят от $\lambda \in \Lambda_0$). Пусть $r_0 = \max_{\lambda \in \Lambda_0} r_*(\lambda)$ и максимум достигается в точке λ_0 :

$$r_*(\lambda_0) = r_0.$$

Далее пусть $Q = \max_{\lambda \in \Lambda_0} (3r_*^2(\lambda) \|\mathbf{G}_*(\lambda)\|)$ и максимум достигается в точке

$$\lambda_1 \in \Lambda_0. \text{ Тогда } Q = 3r_*^2(\lambda_1) \|\mathbf{G}_*(\lambda_1)\| \text{ и } Q < 1.$$

Предположим сначала, что $\|u(\lambda)\| \geq \|u(\lambda + \Delta\lambda)\|$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\|u(s; \lambda + \Delta\lambda) - u(s; \lambda)\| \leq \\ &\leq \int_0^h |G_*(x, s; \lambda + \Delta\lambda) - G_*(x, s; \lambda)| \cdot |u(x; \lambda + \Delta\lambda)|^3 dx + \\ &+ \int_0^h |G_*(x, s; \lambda)| \cdot |u^3(x; \lambda + \Delta\lambda) - u^3(x; \lambda)| dx + |f(s; \lambda + \Delta\lambda) - f(s; \lambda)| \leq \\ &\leq r_0^3 \|\mathbf{G}_*(\lambda + \Delta\lambda) - \mathbf{G}_*(\lambda)\| + \\ &+ 3r_*^2(\lambda) \|u(\lambda + \Delta\lambda) - u(\lambda)\| \cdot \|\mathbf{G}_*(\lambda)\| + \|f(s; \lambda + \Delta\lambda) - f(s; \lambda)\|. \end{aligned} \quad (26)$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} & \|u(s; \lambda + \Delta\lambda) - u(s; \lambda)\| \leq \\ & \leq \frac{r_0^3 \|G_*(\lambda + \Delta\lambda) - G_*(\lambda)\| + \|f(s; \lambda + \Delta\lambda) - f(s; \lambda)\|}{1 - Q}, \end{aligned} \quad (27)$$

где Q, r_0 не зависят от параметра λ .

Пусть теперь $\|u(s; \lambda + \Delta\lambda)\| \geq \|u(s; \lambda)\|$. Тогда все предыдущие оценки остаются в силе, если заменить аргументы λ на $\lambda + \Delta\lambda$, а $\lambda + \Delta\lambda$ на λ . При этом оценка (27) также остается в силе.

5. Исследование дисперсионного уравнения

Рассмотрим дисперсионное уравнение (18). Нули функции $\Delta(\lambda) \equiv Ag(\lambda) - \alpha\Phi(\lambda)$ – это значения λ , для которых существует нетривиальное решение задачи P .

Для доказательства существования решений (нелинейной) задачи P будет использоваться метод малого параметра, и поэтому сначала необходимо рассмотреть вопрос о существовании решений линейной задачи, т.е. задачи P при $\alpha = 0$. Поскольку из физических соображений известно, что для керровской среды коэффициент нелинейности α мал, то применение метода малого параметра в рассматриваемой задаче полностью обосновано (не исключено, однако, что могут возникать решения, которые не могут быть описаны с помощью теории возмущений, см., например, [7]).

В недавней работе [1] получены результаты о разрешимости некоторых линейных задач электродинамики плоских волноведущих структур, и, в частности, доказана разрешимость рассматриваемой нами линейной задачи. Приведем здесь для удобства читателя необходимые формулировки и результаты.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\varphi_n'' + \varepsilon_2(x)\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad \varphi_n'|_{x=0} = 0, \quad \varphi_n'|_{x=h} = 0. \quad (28)$$

Пусть $(\lambda_i, \varphi_i(x))$ – полная система ортонормированных собственных чисел и собственных функций задачи (28). Известно, что все собственные значения вещественные и простые (кратности 1). При этом существует лишь конечное число (или не существует вовсе) положительных собственных значений, и бесконечное число отрицательных, и $\lambda_i \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Упорядочим собственные значения в порядке убывания $\dots < \lambda_n < \lambda_{n-1} < \dots < \lambda_2 < \lambda_1$. Доказано [1], что между каждыми двумя собственными значениями λ_{i+1} и λ_i , $i \geq 1$, лежит по крайней мере одно собственное значение λ_i^* задачи P_0 . Причем из результатов работы [1] следует, что по крайней мере одно собственное значение, будем обозначать его $\tilde{\lambda}_i$, задачи P_0 , лежащее между каждыми двумя собственными значениями λ_{i+1} и λ_i , $i \geq 1$, имеет нечетную кратность.

Принимая во внимание предыдущий параграф, можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть задача (28) имеет $k+1$ ($k \geq 1$) собственных значений λ_i таких, что $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \lambda_{k+1}$, тогда задача P_0 имеет по крайней мере k собственных значений $\tilde{\lambda}_i$ таких, что $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_1 < \tilde{\lambda}_1 < \lambda_2 < \tilde{\lambda}_2 < \dots < \lambda_k < \tilde{\lambda}_k < \lambda_{k+1}$, причем $\tilde{\lambda}_i$ имеет нечетную кратность для всякого $i = \overline{1, k}$.

Теперь можно показать, что существуют решения уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Разрешимость задачи P устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть существует $k \geq 1$ собственных значений задачи P_0 , имеющих нечетные кратности. Тогда существует число $\alpha_0 > 0$ такое, что для всякого $\alpha \leq \alpha_0$ существует по крайней мере k значений $\hat{\gamma}_i$, $i = \overline{1, k}$, таких, что задача P имеет нетривиальное решение, причем $\hat{\gamma}_i^2 \in (\tilde{\lambda}_i - \delta_i, \tilde{\lambda}_i + \delta_i)$, где δ_i – достаточно малые фиксированные числа.

Доказательство. Пусть существует $k \geq 1$ собственных значений $\tilde{\lambda}_i$ ($i = \overline{1, k}$) задачи P_0 , имеющих нечетные кратности и таких, что $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_2 < \dots < \tilde{\lambda}_{k-1} < \tilde{\lambda}_k$.

Ясно, что указанные собственные значения $\tilde{\lambda}_i$ являются корнями уравнения $g(\lambda) = 0$, где g задана формулой (19). Заметим, что $\lambda = \tilde{\lambda}_i$ не являются нулями выражения $1 + k_3 G(h, h; \lambda)$. Также ясно, что $\tilde{\lambda}_i$ не являются собственными значениями оператора $\mathbf{L}$ (см. (11)), а следовательно, не являются и полюсами функции Грина задачи (11).

Поскольку всякое $\tilde{\lambda}_i$ имеет нечетную кратность, то функция $g(\lambda)$ меняет знак при переходе через $\tilde{\lambda}_i$. Теперь выберем достаточно малые числа $\delta_i > 0$ ($i = \overline{1, k}$) так, чтобы выполнялись два условия:

1) на объединении $\Lambda = \bigcup_{i=1}^k \Lambda_i$ отрезков $\Lambda_i := [\tilde{\lambda}_i - \delta_i, \tilde{\lambda}_i + \delta_i]$ функция Грина $G(x, s; \lambda)$ существует и непрерывна, а выражение $1 + k_3 G(h, h; \lambda)$ не обращается в нуль. Другими словами, мы выбираем δ_i таким образом, чтобы ядро G_* оператора $\mathbf{F}$ в уравнении (17) было непрерывно на замкнутом множестве Λ . Такие δ_i всегда существуют в силу вышеизложенного;

2) $g(\tilde{\lambda}_i - \delta_i) \cdot g(\tilde{\lambda}_i + \delta_i) < 0$.

Рассмотрим дисперсионное уравнение $\Delta(\lambda) = 0$. Ясно, что функция $g(\lambda)$ непрерывна и меняет знак при изменении λ от $\tilde{\lambda}_i - \delta_i$ до $\tilde{\lambda}_i + \delta_i$. Поскольку величина $\Phi(\lambda)$ ограничена при $\lambda \in \Lambda_i$, то отсюда ясно, что за счет выбора α всегда можно добиться того, что уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ будет иметь по крайней мере k корней $\hat{\lambda}_i$, причем $\hat{\lambda}_i \in (\tilde{\lambda}_i - \delta_i, \tilde{\lambda}_i + \delta_i)$, где $i = \overline{1, k}$.

Проведем соответствующие оценки. Ядро $G_*(x, s; \lambda)$ оператора $\mathbf{F}$ в уравнении (17) существует и непрерывно для всех $\lambda \in \Lambda$. Также ясно, что функция

$$\alpha_*(\lambda) = \frac{2}{3\|f(\lambda)\|\sqrt{3\|G_k(\lambda)\|}} \quad (29)$$

является непрерывной функцией при $\lambda \in \Lambda$. Пусть $\alpha_1 = \min_{\lambda \in \Lambda} \alpha_*(\lambda)$ и пусть

$$\alpha < \alpha_1^2.$$

В соответствии с теоремой 1 существует единственное решение $u \equiv u(x; \lambda)$ уравнения (17) для всякого $\lambda \in \Lambda$. Это решение является непрерывной функцией и $\|u\| \leq r_* = r_*(\lambda)$. Пусть $r_{\max} = \max_{\lambda \in \Lambda} r_*(\lambda)$. Оценивая

$\Phi(\lambda)$, получим $\|\Phi(\lambda)\| \leq Cr_{\max}^3$, где C есть некоторая постоянная, не зависящая от λ .

Функция $g(\lambda)$ непрерывна и уравнение $g(\lambda) = 0$ внутри отрезка Λ_i имеет по крайней мере один корень $\tilde{\lambda}_i$. Обозначим

$$M_1 = \min_{0 \leq i \leq k} |u(0)g(\tilde{\lambda}_i - \delta_i)|, \quad M_2 = \min_{0 \leq i \leq k} |u(0)g(\tilde{\lambda}_i + \delta_i)|.$$

Тогда величина $M = \min(M_1, M_2)$ положительна и не зависит от α .

Если $\alpha \leq \frac{M}{Cr_{\max}^3}$, тогда

$$(u(0)g(\tilde{\lambda}_i - \delta_i) - \alpha\Phi(\tilde{\lambda}_i - \delta_i)) \cdot (u(0)g(\tilde{\lambda}_i + \delta_i) - \alpha\Phi(\tilde{\lambda}_i + \delta_i)) < 0. \quad (30)$$

Поскольку $u(0)g(\lambda) - \alpha\Phi(\lambda)$ является непрерывной функцией, следовательно, уравнение $u(0)g(\lambda) - \alpha\Phi(\lambda) = 0$ имеет корень $\hat{\lambda}_i$ внутри Λ_i . Мы можем выбрать

$$\alpha_0 = \min \left\{ \alpha_1^2, \frac{M}{Cr_{\max}^3} \right\}.$$

Собственные значения $\hat{\gamma}_i$ задачи P определяются из уравнения $\hat{\gamma}_i^2 = \hat{\lambda}_i$, $i = \overline{1, k}$.

Из теоремы 3 следует, что при условиях, сформулированных выше, существуют осесимметричные распространяющиеся ТЕ-поляризованные волны без затухания в цилиндрических диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных немагнитной, изотропной неоднородной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра.

6. Численные результаты

Дисперсионные кривые (рис. 1–4) рассчитаны с помощью метода задачи Коши [3, 10].

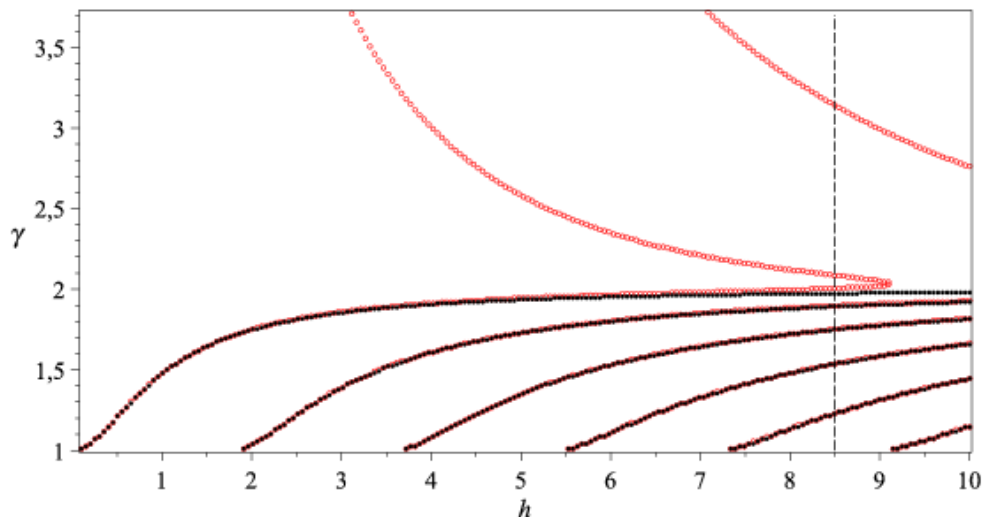


Рис. 1. Дисперсионные кривые. Диэлектрическая проницаемость в слое имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_2 + \alpha |u|^2$, где $\varepsilon_2 = 4$. Закрашенные кружки соответствуют линейному случаю ($\alpha = 0$), незакрашенные – нелинейному случаю ($\alpha = 0,001$).

Вертикальный отрезок $h = 8,5$ соответствует выбранной толщине слоя; точки пересечения этого отрезка с дисперсионными кривыми являются собственными значениями. В рассматриваемом случае в линейной задаче существует пять собственных значений ($\tilde{\gamma}_1 = 1,231$, $\tilde{\gamma}_2 = 1,540$, $\tilde{\gamma}_3 = 1,751$, $\tilde{\gamma}_4 = 1,893$, $\tilde{\gamma}_5 = 1,973$); в нелинейной задаче на рисунке видны семь собственных значений ($\hat{\gamma}_1 = 1,227$, $\hat{\gamma}_2 = 1,543$, $\hat{\gamma}_3 = 1,753$, $\hat{\gamma}_4 = 1,889$, $\hat{\gamma}_5 = 2,006$, $\hat{\gamma}_6 = 2,088$, $\hat{\gamma}_7 = 3,114$)

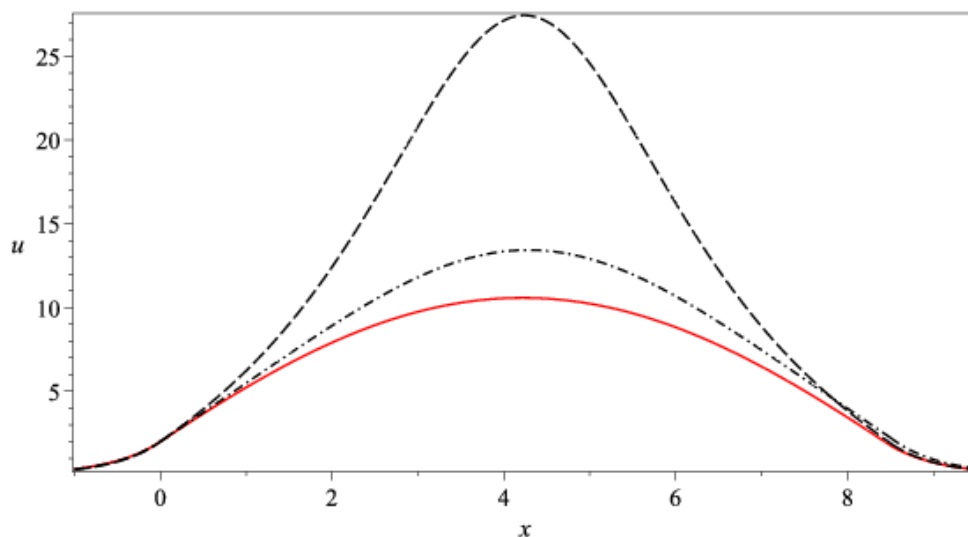


Рис. 2. Собственные функции линейной (сплошная кривая) и нелинейной задач для некоторых из собственных значений, указанных на рис. 1.

Сплошная кривая соответствует $\tilde{\gamma}_5 = 1,973$, ближайшая к сплошной кривая соответствует $\tilde{\gamma}_4 = 1,893$, оставшаяся кривая соответствует $\tilde{\gamma}_6 = 2,088$

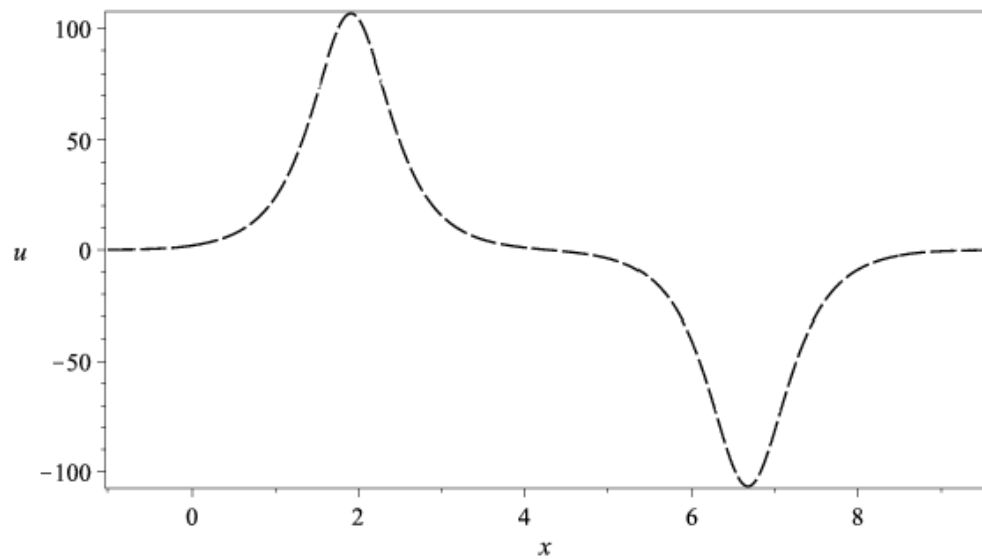


Рис. 3. Собственная функция нелинейной задачи для $\hat{\gamma}_7 = 3,114$ (см. рис. 1)

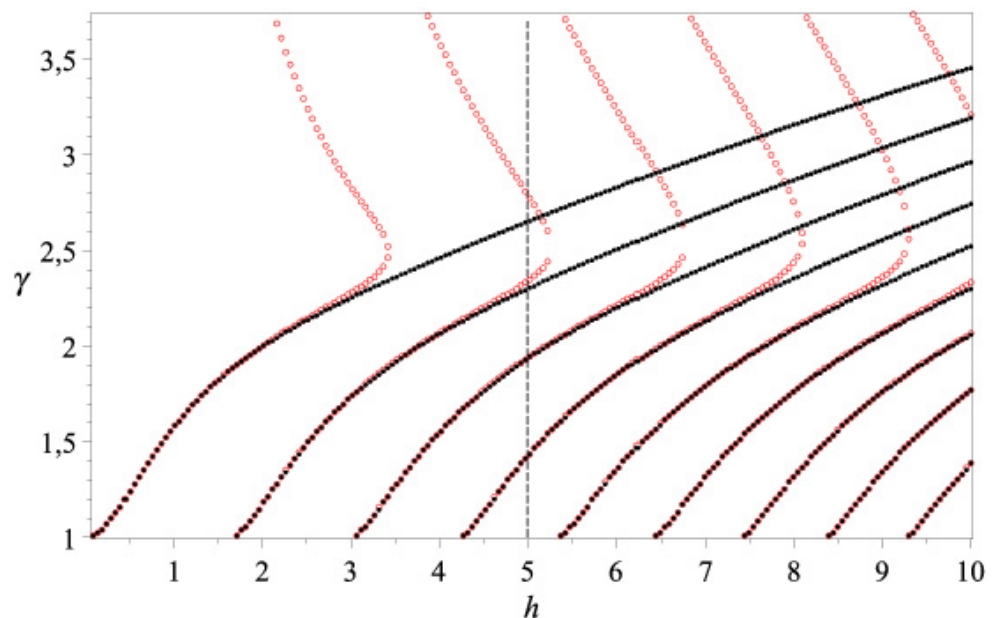


Рис. 4. Дисперсионные кривые. Диэлектрическая проницаемость в слое имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_2 + x + \alpha |u|^2$, где $\varepsilon_2 = 4$. Закрашенные кружки соответствуют линейному случаю ($\alpha = 0$), незакрашенные – нелинейному случаю ($\alpha = 0,001$). Вертикальный отрезок $h = 5$ соответствует выбранной толщине слоя; точки пересечения этого отрезка с дисперсионными кривыми являются собственными значениями. В рассматриваемом случае в линейной задаче существует четыре собственных значения ($\tilde{\gamma}_1 = 1,442$, $\tilde{\gamma}_2 = 1,941$, $\tilde{\gamma}_3 = 2,299$, $\tilde{\gamma}_4 = 2,651$); в нелинейной задаче на рисунке видны четыре собственных значения ($\hat{\gamma}_1 = 1,414$, $\hat{\gamma}_2 = 1,945$, $\hat{\gamma}_3 = 2,345$, $\hat{\gamma}_4 = 2,800$)

В качестве начального условия было выбрано значение постоянной $A=2$, см. формулу (8). Диэлектрические проницаемости при $x < 0$ и $x > h$ равны $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$, коэффициент нелинейности равен $\alpha = 0,001$. Горизонтальная ось на рис. 1 и 4 соответствует толщине слоя h ; вертикальная ось соответствует параметру γ .

Для некоторых собственных значений, указанных на рис. 1 и 4, построены собственные функции (рис. 2, 3, 5 и 6).

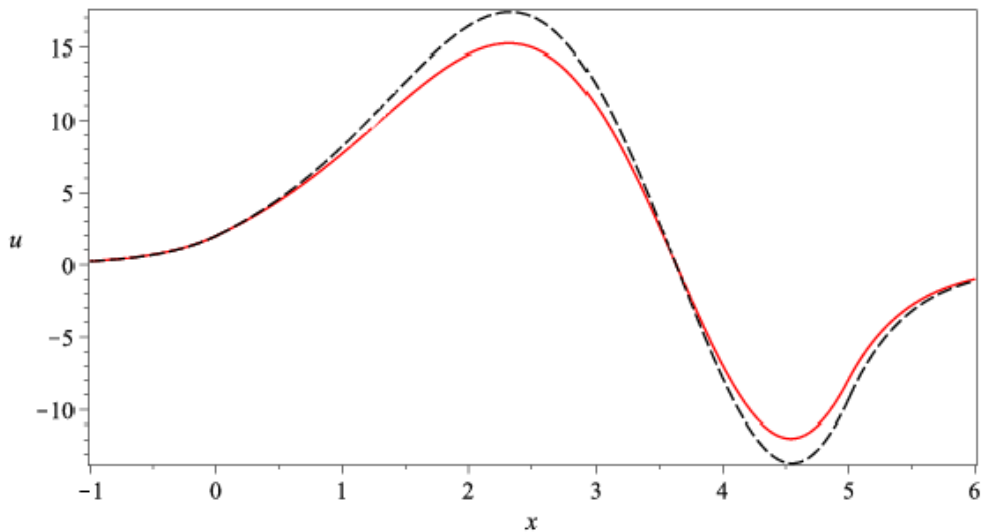


Рис. 5. Собственные функции линейной (сплошная кривая) и нелинейной задач для некоторых из собственных значений, указанных на рис. 4. Сплошная кривая соответствует $\hat{\gamma}_3 = 2,299$, оставшаяся кривая соответствует $\hat{\gamma}_3 = 2,345$

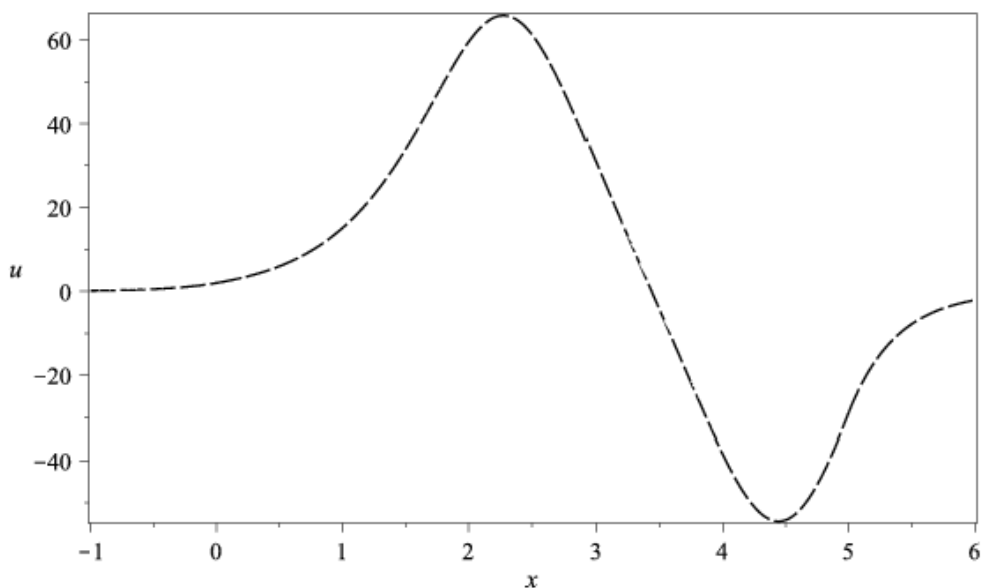


Рис. 6. Собственная функция нелинейной задачи для $\hat{\gamma}_4 = 2,800$ (см. рис. 4)

Список литературы

1. **Смирнов, Ю. Г.** Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ- волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах / Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 3. – С. 460–468.
2. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2010. – 264 с.
3. **Валовик, Д. В.** Численный метод в задаче о распространении электромагнитных ТЕ-волн в двухслойной нелинейной волноведущей структуре / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов, Е. А. Широкова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 1 (21). – С. 66–74.
4. Third Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves / A. D. Boardman, P. Egan, F. Lederer, U. Langbein, D. Mihalache ; ed. by H.-E. Ponath and G. I. Stegeman. – Elsevier Science Publishers, 1991.
5. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейной среде с насыщением / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 11. – С. 1329–1335.
6. **Valovik, D. V.** Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigen- value problem / D. V. Valovik // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2014. – Vol. 20. – P. 52–58.
7. **Smirnov, Yu. G.** Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity / Yu. G. Smirnov and D. V. Valovik // Physical Review A. – 2015. – Vol. 91, № 1.
8. **Валовик, Д. В.** О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2186–2194.
9. **Валовик, Д. В.** Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью / Д. В. Валовик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1729–1739.
10. **Валовик, Д. В.** Метод задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью / Д. В. Валовик, Е. В. Зарембо // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 1. – С. 74–89.
11. **Владимиров, В. С.** Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
12. **Треногин, В. А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1993. – 496 с.

References

1. Smirnov Yu. G. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2015, vol. 55, no. 3, pp. 460–468.
2. Valovik D. V., Smirnov Yu. G. *Rasprostraneniye elektromagnitnykh voln v nelineynykh sloistykh sredakh*. [Electromagnetic wave propagation in nonlinear stratified media]. Penza: Izd-vo PenzGU, 2010, 264 p.
3. Valovik D. V., Smirnov Yu. G., Shirokova E. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2012, № 1 (21), pp. 66–74.

4. Boardman A. D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D. *Third Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves*. Elsevier Science Publishers, 1991.
5. Valovik D. V. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2011, vol. 56, no. 11, pp. 1329–1335.
6. Valovik D. V. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2014, vol. 20, pp. 52–58.
7. Smirnov Yu. G., Valovik D. V. *Physical Review A*. 2015, vol. 91, no. 1.
8. Valovik D. V., Smirnov Yu. G. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2008, vol. 48, no. 12, pp. 2186–2194.
9. Valovik D. V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1729–1739.
10. Valovik D. V., Zarembo E. V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2013, vol. 53, no. 1, pp. 74–89.
11. Vladimirov V. S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Mathematical physics equations]. Moscow: Nauka, 1981, 512 p.
12. Trenogin V. A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka, 1993, 496 p.

Маренникова Екатерина Алексеевна
аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

Marennikova Ekaterina Alekseevna
Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

E-mail: shirokova.ekaterina.88@gmail.com

УДК 517.927, 517.958, 517.968

Маренникова, Е. А.

Задача на собственные значения, описывающая распространение электромагнитных ТЕ-волн в плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой / Е. А. Маренникова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 3 (35). – С. 72–87.